

噪声下数字化多频连续波雷达的测距模糊问题

许邦建,李 纲,皇甫堪

(长沙国防科大电子科学与工程学院信号处理研究室,湖南长沙 410073)

摘要: 数字化多频连续波测距雷达是一种新体制雷达.它具有能同时测定多个目标、便于同时得到目标多个运动参数等突出优点.为了解决增大最大测距不模糊距离与提高测距精度之间的矛盾,我们将会在多频雷达中采用参差频差关系进行测距,这样我们可以大大提高测距最大不模糊距离.但此时噪声对测距结果有着各种有待讨论的影响,包括:能否正确解模糊;对输入信号信噪比有何要求;理论测距精度有何变化;直至对参差系数有何要求等.数字化多频雷达的这些问题,本文对这些问题进行了详细的讨论,并给出了本文结论的计算机仿真结果.从而在理论上为这种雷达的深入研究提供了一个很好的基础.

关键词: 多频连续波雷达; 相位测距; 参差; 距离模糊; 信噪比

中图分类号: TN958.94 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 06-0903-04

Ambiguity Problem of Digitized Multiple Frequency CW Ranging Radar Under Noisy Condition

XU Bang-jian, LI Gang, HUANGFU Kan

(Signal Processing Research Room, School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: Digitized multiple frequency CW radar is a kind of new system radar. It can detect lots of targets and acquire different movement parameters as well. But it is hard to enlarge maximum unambiguous range while improving ranging accuracy at the same time. To deal with such a contradiction, stagger frequency differences are adopted, thus maximum unambiguous range can be enlarged greatly. The influences the noise may have on the ranging results are presented. Correct solutions for ambiguous range, the limitation for input SNR, change in ranging accuracy and restriction to staggering parameters are discussed. Simulation results verify the conclusion, which could be a groundwork to future research.

Key words: multiple frequency CW radar; phase ranging; stagger; range ambiguity; SNR

1 引言

多频连续波雷达^[1]具有设备简单、理论测距精度高、便于同时测速测距等优点.近年来,随着现代靶场测量雷达改进和发展的需要,其研究又受到人们的重视.

双频连续波测距的理论精度为 $\frac{c}{4f\sqrt{2}\text{SNR}}$ (其中 f 为本次测距所用的频差, SNR 为信噪比),而理论上在该频差下的最大不模糊测距距离为 $\frac{c}{2f}$.因此双频连续波雷达存在着测距精度与最大测距不模糊距离之间的矛盾^[1].为了解决这一矛盾,可以采用多频体制,仿照脉冲雷达中多重脉冲重复频率 (PRF) 测距的技术,同时或顺序发射多对双频信号^[2],且每对双频信号的频率之差按照一定的参差关系选择,如此可以提高雷达测距性能.

在这种信号设计方法之下,实际测距中存在的噪声扰动对目标距离解模糊有什么样的影响?正确解模糊需要什么条件的条件?这些对实际雷达系统的研制而言都是非常重要的理论课题.对于以上问题,国内外已经有多篇论文进行了相关研究.文献^[2]就相位测距中解模糊方法等进行了讨论,并根据模拟计算和外场测试给出了正确解模糊的条件:相位测量误

差值不能超过 10° ,但该条件并没有得到理论推导的严格证明;文献^[3]针对多重脉冲重复频率测距时的解模糊问题,讨论了整数单位噪声下的误差过敏效应,给出了一种推广的孙子定理以及减轻过敏误差效应的办法,并提出了正确模糊分辨概率的计算公式;文献^[4]针对无噪声时实数域同余方程组求解问题提出了微分方程求解的办法;文献^[5]讨论了整数同余方程组情况下正确解模糊的条件,其讨论的对象是多重脉冲重复频率测距雷达.

以上文献都没有就噪声下多频连续波测距的情况进行讨论(此时问题的数学模型为除数是整数的实数域内带误差项的同余方程组).因此就该情况下正确解模糊的条件、理论测距误差以及为保证可靠解模糊所需的信噪比等问题进行深入探讨是十分必要的.

2 问题的具体数学模型

假设同时发射 M 对正弦信号,其差频值分别为 $f_i (i = 1, \dots, M)$,则相应于 f_i 的最大不模糊距离为 $c/(2f_i)$.另外假设由第 i 对信号所测得的模糊距离为 $R_i = c \cdot \varphi_i / (4\pi f_i)$,其中 φ_i 为第 i 对信号的回波相位差 ($0 \leq \varphi_i < 2\pi$).则目标实际距离可表示为:

$$R = k_i \frac{c}{2 \cdot f_i} + \frac{c \cdot i}{4 \cdot f_i}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1)$$

仿照 PRF 技术^[2],先取定一基本频差 f_0 ,然后取 $f_i = \frac{f_0}{m_i}$,则可改写式(1)如下(m_i 为参差比):

$$\frac{R}{c/(2 \cdot f_0)} = k_i \cdot m_i + \frac{i}{2} \cdot m_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (2)$$

令 $R_0 = \frac{c}{2 \cdot f_0}, L = \frac{R}{R_0}, L = \frac{R}{R_0}$,则式(2)又可写为:

$$L = k_i \cdot m_i + (\frac{i}{2}) \cdot m_i \quad (3)$$

在理想的无噪情况下,式(3)为一个除数为整数的实数域内的同余方程组,它在由 m_i 所决定的最大不模糊距离之内具有唯一解.

但在实际中,必须考虑噪声扰动的影响.假设由于噪扰而在真实相差 i 上产生了大小为 (h_i) 的误差,令 $h_i = \frac{L - k_i \cdot m_i + (i/2) \cdot m_i}{2} \pmod{m_i}$. 则在一般情况下, $k_i \cdot m_i + h_i$

$$L_i = k_i \cdot m_i + h_i, 0 \leq h_i < m_i \quad (4)$$

式(4)求解的准则在此可以定为求 (k_1, \dots, k_M) 以使得 $f_{i,j} = \min$, 其中 $f_{i,j} = |L_i - L_j|$ (5)

然后就可得到真实距离 R 所对应的 L 的估计值为 $L = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^M L_i$, R 的估计值为 $R = L \cdot R_0$.

3 多频连续波测距的误差敏感性

整数域同余方程组对噪扰误差有非常大的敏感性^[3],而理想无噪条件下实数域同余方程组也可以简化为整数域同余方程组来考虑^[4],因此这种敏感性同样也会反映在多频连续波雷达中.

因此有必要分析什么条件下可以对式(4)正确地解模糊.也即:分析噪扰限制在什么范围之内时, h_i 的误差仅仅引起 L 的正常误差,而不会导致很大的过敏误差,也即能够求得正确的 k_i .

4 正确解模糊的条件

注意到 (h_i) 为一随机变量,因此我们只能讨论在 (h_i) 位于其分布范围内的哪一段区间时我们可以进行正确解模糊.

定理 A 如果限定噪扰的程度在 $|h_i - \frac{i}{2} \cdot m_i| \leq q$ 以内 (q 为一正实数),则当且仅当 $m_i = \lceil 4q \rceil \cdot p_i$ (p_i 两两互素, $\lceil * \rceil$ 是大于 $(*)$ 的最小正整数)时,可以对式(4)进行正确解模糊并且保证 $|h_i|$ 的取值范围尽可能大.

参照文献[5]给出证明如下:

对于正确的系数解,记作 k_i ;反之,记作 \bar{k}_i .为考虑问题简单清楚起见,不妨先设定 $M = 2$.

先证充分性.易知,当 $m_i = \lceil 4q \rceil \cdot p_i$ 时,根据文[5]中引理 B, $k_i m_i - k_j m_j = \lceil 4q \rceil$ 在范围 $0 \leq k_1 < p_2, 0 \leq k_2 < p_1$ 之内有解.综合文献[5]中的引理 A、B,易知此时总有 $|k_i m_i - k_j m_j|_{\min} = \lceil 4q \rceil$ 成立.从而有 $|(\bar{k}_1 - k_1) m_1 - (\bar{k}_2 - k_2) m_2|_{\min} = \lceil 4q \rceil$ (这

一点可通过分别讨论 $(\bar{k}_i - k_i)$ 的正负而得到). h_i 所含的噪扰假设为 q ,则可知 $|(q_1 - q_2) + (\bar{k}_1 - k_1) m_1 - (\bar{k}_2 - k_2) m_2| > 2q$,也即 $|(\bar{k}_1 m_1 + h_1) - (\bar{k}_2 m_2 + h_2)| > 2q, |(k_1 m_1 + h_1) - (k_2 m_2 + h_2)| < 2q$ 成立.也就是说,此时能够对式(4)正确解模糊.

再证必要性.为了能够对式(4)正确解模糊,应该有 $|(\bar{k}_1 m_1 + h_1) - (\bar{k}_2 m_2 + h_2)| > 2q$ 成立.也即应有 $|(q_1 - q_2) + (\bar{k}_1 - k_1) m_1 - (\bar{k}_2 - k_2) m_2| > 2q$ 成立.注意到 q_i 在区间 $|q_i| \leq q$ 之内出现的随机性和 k_i, \bar{k}_i 的区间,可知应有 $|k_1 m_1 - k_2 m_2|_{\min} = H (H \geq \lceil 4q \rceil)$ 成立.也即 $k_1 m_1 - k_2 m_2 = H$ 应该有解;而对于任意 $W < H$,方程 $k_1 m_1 - k_2 m_2 = W$ 都应该无解.根据文献[5]中引理 B, (m_1, m_2) 应该能够整除 H ,但不能整除 W .从而得到 $(m_1, m_2) = H$.但是,注意到 $|h_i| \leq \frac{2 \cdot q \cdot i}{(m_i)_{\max}}$,为了保证 $|h_i|$ 的取值范围尽可能大,应该取 $H = \lceil 4q \rceil$.

至此证明了在 $M = 2$ 情况下本定理的正确性.参照文献[5]易将结论推广到任意 M 的情况.

定理 B 令 $m_i = F \cdot p_i, F = \lceil 4q \rceil$,则当 (h_i) 分布在 $[-\frac{2 \cdot q \cdot i}{(m_i)_{\max}}, \frac{2 \cdot q \cdot i}{(m_i)_{\max}}]$ 区间之内时,为了能正确解距离模糊,目标距离应该限制在范围 $[q \cdot R_0, \left(F \cdot \prod_{i=1}^M p_i - q \right) \cdot R_0]$ 之内 (其中 p_i, q 与 F 的性质同定理 A, $(m_i)_{\max}$ 是几个 m_i 中最大的一个).

证明 在本定理的条件之下,显然有 $|h_i - \frac{i}{2} \cdot m_i| \leq q$.再结合定理 A,不难验证本定理的正确性.

综上所述,在所给条件下式(3)、(4)具有相同的同余系数解,并且易知此时有下式成立:

$$R - R = \frac{R_0}{N} \cdot \prod_{i=1}^M \left(h_i - \frac{m_i}{2} \right) \quad (6)$$

5 正确解模糊对信噪比的要求

在信噪比 SNR 下,由文献[1],在连续观测情况下 i 测量的理论精度为 $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \text{SNR}}}$.但在实际的多频连续波测距过程中,都是根据采样信号经过 FFT 之后计算 i ,此时的结论自然有所不同.

FFT 比相具体方法可参见文献[6],在高斯加性白噪声情况下易知 FFT 比相是相差的近似极大似然估计(在大信噪比及 FFT 点数较大情况下).假定每次作 FFT 所用点数为 N ,根据相应的 Fisher 信息矩阵,容易求得在离散观测情况下相差估计误差的 CR 界为:

$$\text{Var}\{i\} \leq \frac{1}{N} \cdot \frac{2(2N-1)}{N+1} \cdot \frac{1}{\text{SNR}} \quad (7)$$

为保证能够尽量可靠地解模糊,设定:

$$6 \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \frac{2(2N-1)}{N+1} \cdot \frac{1}{\text{SNR}}} \leq \frac{2 \cdot q}{m_i} \quad (8)$$

从而得到:

$$\text{SNR} \geq \frac{18 \cdot (2N-1) \cdot (m_i)_{\max}^2}{q^2 \cdot 2 \cdot N \cdot (N+1)}, \quad i = 1, \dots, M \quad (9)$$

6 固定信噪比及参差频差下测距的理论精度

对于单一固定频差 f , 在连续观测下其比相测距的理论精度为^[1] $(R) = \frac{c}{4 \cdot f \cdot \sqrt{2 \cdot \text{SNR}}}$, 现在在参差频差而且离散观测情况下进行比相测距, 结论当然有所不同. 由以上的定理知 $R - R = \frac{R_0}{N} \cdot \prod_{i=1}^M [(i) \cdot \frac{m_i}{2}]$, 再结合式 (7), 显然此时测距的均方根误差为

$$(R) = \frac{c}{4 \cdot f_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \frac{2(2N-1)}{N+1} \cdot \frac{1}{\text{SNR}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^M m_i^2}{M}} \quad (10)$$

7 讨论

现在针对四参差情况下具体参差参数的选取, 来做一些讨论.

首先需要指出的是, 为保证在接收端顺利提取回波多普勒信号, 需要限定 $f_i = \frac{f_0}{m_i} \geq 2 \cdot f_{d \max}$, 其中 $f_{d \max}$ 为中频回波信号的最大可能多普勒频率. (这一点将另文讨论).

综合以上结论, 在取 FFT 点数为 1024 的情况下, 可将确定参差参数的各项约束条件表示如下:

$$f_0 / m_i \geq 2 f_{d \max} \quad (11)$$

$$| (i) | \leq \frac{2 \cdot q \cdot}{m_i} \quad (12)$$

$$\text{SNR}_{\min} = 0.0571 \cdot (p_i)_{\max}^2 \quad (13)$$

$$R_{\text{unam}} = \frac{c}{2 \cdot f_0} \cdot \sqrt[4]{4q} \cdot \prod_{i=1}^M p_i \quad (14)$$

$$(R) = 0.0625 \cdot \sqrt[4]{4q} \cdot \frac{c}{4 \cdot f_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{SNR}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^M p_i^2}{M}} \quad (15)$$

一般总希望 $| (i) |$ 的上限尽可能大一些, 假若这里限定为 10, 则由式 (12), $(p_i)_{\max}$ 应该为 9, 故而 p_i 从小到大依次应该为 5、7、8、9. 取 $f_{d \max} = 150\text{kHz}$, 则由式 (11), 易知 $\frac{f_0}{m_i} \leq \frac{1}{2.7 \times 10^6}$. 取 $\frac{f_0}{m_i} \leq \frac{1}{2.7 \times 10^6}$, 则由式 (14), $R_{\text{unam}} = 140\text{km}$. 此时由式 (13), 最低工作信噪比为 6.6512dB. 再由式 (15), 可知,

$$(R) = 2.0455 \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{SNR}}}$$

为简单起见, 取 $4q = 0.9999$, 即 $q = 0.2499$, 则 $f_0 = 2.7\text{MHz}$.

表 1 参差比相测距各项参数与参差重数对应表

$| (i) |$ 的上限为 10, $f_{d \max} = 150\text{kHz}$

各项指标最佳值	q	f_0 (MHz)	p_i	R_{unam} (km)	(R) (m)	最低信噪比要求
参差重数						
2	0.2499	2.7	8, 9	4	106.4711 $\sqrt{\frac{1}{N \cdot \text{SNR}}}$	$\frac{46656}{2N}$
3	0.2499	2.7	7, 8, 9	28	82.1027 $\sqrt{\frac{1}{N \cdot \text{SNR}}}$	$\frac{46656}{2N}$
4	0.2499	2.7	5, 7, 8, 9	140	65.4244 $\sqrt{\frac{1}{N \cdot \text{SNR}}}$	$\frac{46656}{2N}$

参照以上推导过程, 就相同的假设条件, $N = 2$ 和 $N = 4$

情况下的结论可参见下表 1.

8 计算机仿真结果

8.1 正确解模糊条件的正确性

先讨论该条件的充分性. 取 $q =$

0.2499, $m_1 = 2, m_2 =$

3. $h_1 = 1 + q_1, h_2 = 2$

+ q_2 , 其中 q_1, q_2 为

噪声, 令 q_1, q_2 在区

间 $[-s, s]$ 内均匀随机、

独立地产生. 现在在每

个取定的 s 值处进行

100000 次 Monte-Carlo

仿真实验, 看正确解同

余方程组的概率. 这个试

验可以从一个方面验证

定理 A 的正确性. 图 1

(a) 列出了试验结果 (中

横轴为 s 的值, 纵轴为

正确解模糊概率):

一开始, 正确解模糊的

概率都维持在 100%; 随

着 s 的增大, 在 $s =$

0.25 处, 正确解模糊的

概率曲线出现了一个非

常明显的转折点; 随后

概率曲线几乎直线下降

. 这与依据定理 A 所作

出的预测完全一致.

再讨论定理 A 的必要性. 取 $q =$

0.9999, $m_1 = 6, m_2 =$

9. $h_1 = 4 + q_1, h_2 = 1 +$

q_2 . 令 q_1, q_2 在区间

$[-s, s]$ 内均匀随机、

独立地产生. 现在在每

个取定的 s 值处进行

100000 次 Monte-Carlo

仿真实验, 看正确解同

余方程组的概率. 图 1

(b) 列出了试验结果: 一

开始, 正确解模糊的概

率都维持在 100%; 随

着 s 的增大, 在 $s =$

0.75 处, 正确解模糊的

概率曲线出现了一个非

常明显的转折点; 随后

概率曲线几乎直线下降

. 这与依据定理 A 所作

出的预测 (不正确的一

组参差系数不能保证在

该噪声范围内能够正确

解模糊) 也完全一致.

8.2 目标的不模糊距离范围

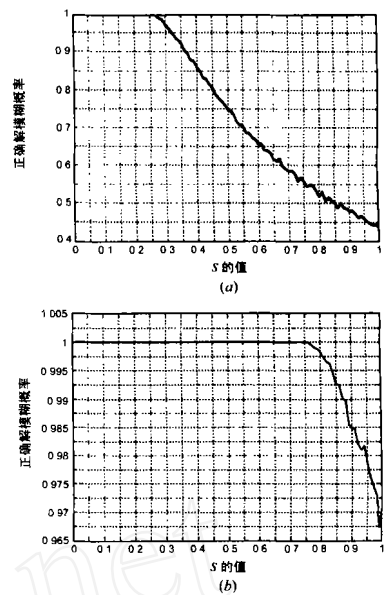


图 1 正确解模糊条件的充分性验证试验

正确解模糊概率): 一开始, 正确解模糊的概率都维持在 100%; 随着 s 的增大, 在 $s = 0.25$ 处, 正确解模糊的概率曲线出现了一个非常明显的转折点; 随后概率曲线几乎直线下降. 这与依据定理 A 所作出的预测完全一致.

再讨论定理 A 的必要性. 取 $q = 0.9999, m_1 = 6, m_2 = 9. h_1 = 4 + q_1, h_2 = 1 + q_2$. 令 q_1, q_2 在区间 $[-s, s]$ 内均匀随机、独立地产生. 现在在每个取定的 s 值处进行 100000 次 Monte-Carlo 仿真实验, 看正确解同余方程组的概率. 图 1 (b) 列出了试验结果: 一开始, 正确解模糊的概率都维持在 100%; 随着 s 的增大, 在 $s = 0.75$ 处, 正确解模糊的概率曲线出现了一个非常明显的转折点; 随后概率曲线几乎直线下降. 这与依据定理 A 所作出的预测 (不正确的一组参差系数不能保证在该噪声范围内能够正确解模糊) 也完全一致.

8.2 目标的不模糊距离范围

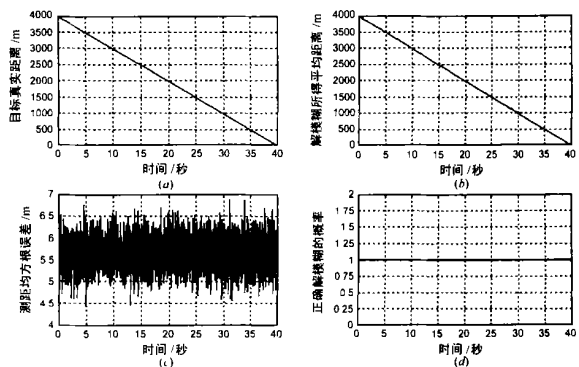


图 2 目标不模糊距离范围的验证试验

取 $f_0 = 2.7\text{MHz}$, $m_1 = 8$, $m_2 = 9$, $q = 0.2499$. 取 FFT 点数 N 为 512, 依据仿真假设做 Monte-Carlo 计算机仿真, 试验次数为 10000. 仿真的条件是: 接收机采用正交双通道结构, 目标朝向雷达作匀速直线运动, 目标速度为 100m/s . 另外, 同时发射三个点频信号, 频率分别为 $f_0 = 10.5\text{GHz}$, $f_1 = f_0 + f_0/m_1$, $f_2 = f_0 + f_0/m_2$, 采样频率 $f_s = 50\text{kHz}$, 单次测距时间为 $N/50\text{k}$ 秒. 此时根据定理 B, 能够正确解模糊的目标距离范围为 $13.8889\text{m} \sim 3.9861\text{km}$. 因此设定目标在初始时刻与雷达之间距离为 3.9861km , 总的观测时间为 39.722 秒.

Monte-Carlo 仿真结果可参见图 2.

由图 2 可以看出: 在目标距离范围 $[13.8889\text{m}, 3.9861\text{km}]$ 之内, 都可以正确解模糊. 现在讨论目标处于距离范围 $[0, 13.8889\text{m}]$ 内的情况, 也进行 10000 次 Monte-Carlo 试验. 结果如图 3 所示. 在图 3 中, 可以注意到随着目标真实距离的减小, 正确解模糊的概率也随之近似直线下降. 从根本上来说, 这是因为此时虽然噪声的最大幅度是一定的, 但是经过求模运算之后, 其让同余方程组的余数发生突变的概率越来越大.

在目标处于距离范围 $[3.9861\text{km}, 4\text{km}]$ 内时存在着类似的情况, 具体结果不再赘述.

8.3 正确解模糊时的信噪比要求以及测距精度

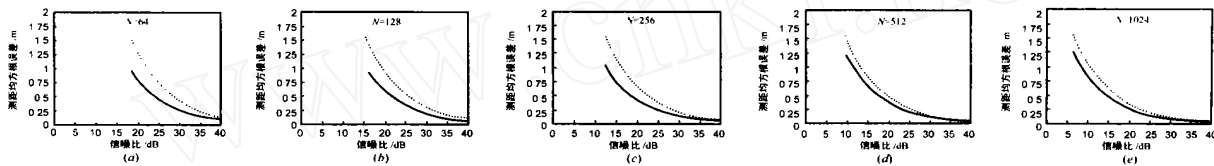


图 4 正确解模糊时均方根误差与信噪比的关系. (实线为仿真所得数据, 虚线为理论 C-R 界)

9 结束语

本文详细讨论了噪声条件下关于参差频差比相测距距离模糊的一些重要问题, 给出了理论结论. 然后我们进行了计算机仿真, 其结果验证了我们所给结论的正确性, 从而为以后的深入研究提供了重要的基础.

参考文献:

[1] (美) M I Skolnik. 雷达系统导论 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1992 年 2 月第一版. 59 - 70.
 [2] 沈福民, 贾永康. 相位测距中的解模糊技术 [J]. 西安电子科技大学学报, 1997, 24(1): 52 - 57.
 [3] 黄振兴. 距离-速度噪声数据同时分辨的孙子定理算法 [J]. 电子学报, 1992, 20(9): 27 - 33.
 [4] 孙洪. 同余方程组的微分方程求解法 [J]. 应用数学, 1996(增刊): 158 - 161.
 [5] William S. MC Cormick, James B. Y. TSUI, Vernon L. Bakke. A noise insensitive solution to an ambiguity problem in spectral estimation [J]. IEEE Trans AES, 1989, 25(5): 731 - 732.

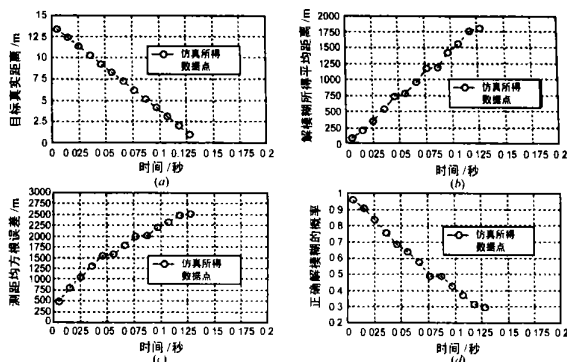


图 3 目标模糊距离范围的验证试验

取 $f_0 = 2.7\text{MHz}$, $m_1 = 8$, $m_2 = 9$. 目标初始距离为 3000m , 朝向雷达作匀速直线运动, 目标速度为 100m/s . 采样频率 $f_s = 50\text{kHz}$. 改变 N 和 SNR 的值. 对每一 N , 其对应选取的 SNR 都从 $(\text{SNR}_{\text{min}})_N$ 开始直至 40dB . 对每一组 N 、SNR 都进行 10000 次 Monte-Carlo 仿真试验. 最后给出在各个值下, 测距的均方根误差与信噪比的关系曲线, 如图 4 所示. 可见, 此时的理论 C-R 界与计算机仿真结果符合得比较好. 试验中, 测距结果都得到了正确的解模糊.

[6] 许邦建, 皇甫堪. FFT 比相测距的理论及仿真 [J]. 兵工学报, 2000, 6: 53 - 54

作者简介:



许邦建 男, 1974 年 10 月生于安徽省安庆市, 从事雷达系统和信号处理、神经网络等方面的研究, 现在正在国防科技大学电子科学与工程学院硕博连读攻读博士学位, 目前已经发表论文数篇.

李 纲 男, 1966 年 2 月生于湖南邵阳县, 讲师, 在职博士生, 主要从事雷达和通信信号处理及其实现技术研究.

皇甫堪 男, 1939 年 4 月生于上海市, 教授, 博士生导师, 主要从事现代信号处理技术方面的研究.